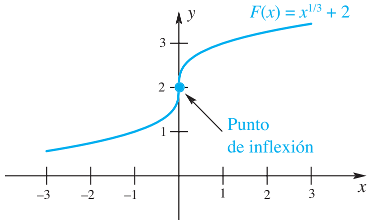

Figura 19

EJEMPLO 7 Encuentre todos los puntos de inflexión de $F(x) = x^{1/3} + 2$.

SOLUCIÓN

$$F'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}, \qquad F''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}$$

La segunda derivada, $F''(x)$, nunca es cero; sin embargo, no existe en $x = 0$. El punto $(0, 2)$ es un punto de inflexión, ya que $F''(x) > 0$ para $x < 0$ y $F''(x) < 0$ para $x > 0$. La gráfica se bosqueja en la figura 19. ■

Revisión de conceptos

1. Si $f'(x) > 0$ en todas partes, entonces f es _______ en todas partes; si $f''(x) > 0$ en todas partes, entonces f es _______ en todas partes.

2. Si _______ y _______ en un intervalo abierto I, entonces f es creciente y cóncava hacia abajo en I.

3. Un punto en la gráfica de una función continua, en donde la concavidad cambia se denomina _______.

4. Al tratar de localizar los puntos de inflexión para la gráfica de una función f debemos buscar números c, en donde _______ o bien _______.

Conjunto de problemas 3.2

En los problemas del 1 al 10 utilice el teorema de monotonía para encontrar en dónde la función dada es creciente y en dónde es decreciente.

1. $f(x) = 3x + 3$ **2.** $g(x) = (x + 1)(x - 2)$

3. $h(t) = t^2 + 2t - 3$ **4.** $f(x) = x^3 - 1$

5. $G(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ **6.** $f(t) = t^3 + 3t^2 - 12$

7. $h(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{4z^3}{6}$ **8.** $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$

9. $H(t) = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$

10. $R(\theta) = \cos^2 \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

En los problemas del 11 al 18 utilice el teorema de la concavidad para determinar en dónde la función dada es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. También encuentre todos los puntos de inflexión.

11. $f(x) = (x - 1)^2$ **12.** $G(w) = w^2 - 1$

13. $T(t) = 3t^3 - 18t$ **14.** $f(z) = z^2 - \frac{1}{z^2}$

15. $q(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 3x + 1$

16. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$ **17.** $F(x) = 2x^2 + \cos^2 x$

18. $G(x) = 24x^2 + 12 \operatorname{sen}^2 x$

En los problemas del 19 al 28 determine en dónde la gráfica de la función dada es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Después dibuje la gráfica (véase el ejemplo 4).

19. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

20. $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$

21. $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$ **22.** $F(x) = x^6 - 3x^4$

23. $G(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ **24.** $H(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

25. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ en $[0, \pi]$ **26.** $g(x) = x\sqrt{x - 2}$

27. $f(x) = x^{2/3}(1 - x)$ **28.** $g(x) = 8x^{1/3} + x^{4/3}$

En los problemas del 29 al 34 dibuje la gráfica de una función continua f en [0, 6] que satisface todas las condiciones que se establecen.

29. $f(0) = 1; f(6) = 3$; creciente y cóncava hacia abajo en $(0, 6)$.

30. $f(0) = 8; f(6) = -2$, decreciente en el intervalo $(0, 6)$; punto de inflexión en la pareja ordenada $(2, 3)$, cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, 6)$.

31. $f(0) = 3; f(3) = 0; f(6) = 4;$

$f'(x) < 0$ en $(0, 3)$; $f'(x) > 0$ en $(3, 6)$;

$f''(x) > 0$ en $(0, 5)$; $f''(x) < 0$ en $(5, 6)$

32. $f(0) = 3; f(2) = 2; f(6) = 0;$

$f'(x) < 0$ en $(0, 2) \cup (2, 6)$; $f'(2) = 0$;

$f''(x) < 0$ en $(0, 1) \cup (2, 6)$; $f''(x) > 0$ en $(1, 2)$

33. $f(0) = f(4) = 1; f(2) = 2; f(6) = 0;$

$f'(x) > 0$ en $(0, 2)$; $f'(x) < 0$ en $(2, 4) \cup (4, 6)$;

$f'(2) = f'(4) = 0$; $f''(x) > 0$ en $(0, 1) \cup (3, 4)$;

$f''(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (4, 6)$

34. $f(0) = f(3) = 3; f(2) = 4; f(4) = 2; f(6) = 0;$

$f'(x) > 0$ en $(0, 2)$; $f'(x) < 0$ en $(2, 4) \cup (4, 5)$;

$f'(2) = f'(4) = 0$; $f'(x) = -1$ en $(5, 6)$;

$f''(x) < 0$ en $(0, 3) \cup (4, 5)$; $f''(x) > 0$ en $(3, 4)$

35. Demuestre que una función cuadrática no tiene puntos de inflexión.

36. Demuestre que una función cúbica tiene exactamente un punto de inflexión.

37. Demuestre que, si $f'(x)$ existe y es continua en un intervalo I y si $f'(x) \neq 0$ en todos los puntos interiores de I, entonces f es creciente